ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE Section A 3

MATHEMATIQUES (4 h) 1975 (Programme C)

PREMIER PROBLÈME

On considère l'équation différentielle

$$y' = \frac{1 + 2mxy}{x^2 + 1} \qquad \text{(E)}$$

où m est un nombre réel quelconque.

On appelle I_m l'application de **R** dans **R** définie par

$$I_m(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + 1)^{m+1}}$$

I

1° Montrer que la solution générale définie sur **R** de l'équation différentielle (E) est définie par

$$y = (I_m(x) + \lambda)(x^2 + 1)^m$$

où λ est une constante réelle.

2° Dans le cas particulier où $m = \frac{3}{2}$, montrer qu'il existe une fonction polynôme de degré 3 solution de (E). Exprimer la solution générale de l'équation différentielle à l'aide de fonctions élémentaires de x.

II

On considère la fonction numérique f_λ définie par

$$f_\lambda(x) = \lambda(x^2 + 1)^{3/2} + x + \frac{2}{3}x^3$$

Soit C_λ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

1° Déterminer les réels a, b, c, d, e tels que, au voisinage de plus l'infini, puis au voisinage de moins l'infini

$$f_\lambda(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{e}{x} + \frac{\varepsilon(x)}{x}$$

où ε est une fonction de x telle que $\lim_{|x| \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

2° Comparer les courbes C_λ et $C_{-\lambda}$.

On se limitera dans toute la suite à $\lambda \geqslant 0$.

3° Étudier, suivant les valeurs positives de λ, le sens de variation de la fonction f_λ.

4° Tracer la courbe correspondant à $\lambda = \frac{2}{3}$

5° Pour des valeurs de λ que l'on déterminera, la courbe C_λ présente un point dont la tangente est parallèle à $x'Ox$. Déterminer l'ensemble (T) de ces points. Tracer (T).

6° Pour certaines valeurs de λ que l'on déterminera la courbe C_λ admet un point d'inflexion. Déterminer l'ensemble (I) de ces points. Tracer (I).

7° Donner l'allure dans un même repère des différentes formes des courbes C_λ ($\lambda \geqslant 0$).

III

Développer en série entière de x la fonction f_λ. Déterminer son rayon de convergence.

DEUXIÈME PROBLÈME

I

On considère lés matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1° Si I est la matrice unité d'ordre 3 et λ un réel, soit

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$$

le déterminant de la matrice $A - \lambda I$. Déterminer les réels a_0 , a_1 , a_2 , a_3 . Calculer ensuite

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$$

En déduire le calcul de A^n , n étant un entier naturel (on pourra envisager les cas où n est pair, n impair).

2° Même question en considérant la matrice B.

II

Soit F l'espace vectoriel sur **R** des fonctions réelles de la variable réelle définies et intégrables sur l'intervalle $J = [1 ; 3]$.

$\mathfrak{M}$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On considère l'application φ de F dans $\mathfrak{M}$ qui, à toute fonction f de F associe la matrice $\varphi(f)$ de $\mathfrak{M}$ définie comme suit :

si $a_{ij}(f)$ est le terme situé à l'intersection de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne alors

$$a_{ij}(f) = \int_i^j f(x)dx \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3 \quad ; \quad 1 \leqslant j \leqslant 3$$

1° Montrer que l'application φ est une application linéaire de F dans $\mathfrak{M}$.

2° Déterminer une base de l'image de φ et donner la dimension de l'image de φ.

3° La fonction g telle que $g(x) = \sin(2\pi x)$ est-elle un élément du noyau de φ? L'application φ est-elle injective ?

Donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur des intégrales définies de la fonction f pour que f appartienne au noyau de φ.

4° On considère la fonction h telle que :

$$\begin{cases} h(x) = x \mid \sin \pi x \mid & \text{si} \quad x \in [1 ; 2] \\ h(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin [1 ; 2] \end{cases}$$

Déterminer $\varphi(h)$ et calculer $[\varphi(h)]^{20}$.

5° On considère la fonction p telle que :

$$\begin{cases} p(x) = e^{-x} \cos \pi x & \text{si} \quad x \in [2 ; 3] \\ p(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin [2 ; 3]. \end{cases}$$

Déterminer $\varphi(p)$ et calculer $[\varphi(p)]^{21}$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail